Prova de Matemática

Questão 01 – Gabarito A

$$n!+n-1=$$
$$n(n-1)(n-2)!+(n-1)=$$
$$(n-1)\left[n(n-2)!+1\right]$$

Portanto, a expressão é divisível por $n-1$.

Questão 02 – Gabarito C

Consideremos uma situação inicial de paridade dólar-real, em que 1 dólar vale 1 real. Se o dólar sofrer uma alta de 100% em relação ao real, serão necessários 2 reais para comprar 1 dólar. Isso significa que 1 real passaria a comprar 0,50 dólar, o que indica uma queda de 50% do real em relação ao dólar.

Questão 03 – Gabarito D

$$\frac{x}{x+1}=k$$
$$x=k(x+1)$$
$$x=kx+k$$
$$x-kx=k$$
$$x(1-k)=k$$
$$x=\frac{k}{1-k}$$

Como o denominador $1-k$ deve ser diferente de zero, vem

$$1-k\neq 0$$
$$k\neq 1$$

Questão 04 – Gabarito E

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Logo, $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$.

$$y=x.f(x)$$
$$y=x.\left(-\frac{1}{3}x+1\right)$$
$$y=-\frac{1}{3}x^2+x$$

As raízes de y são $x = 0$ e $x = 3$, e seu gráfico é representado por uma parábola com concavidade para baixo.

Questão 05 – Gabarito E

$V = a.b.c$
$V' = (0,9.a).(0,95.b).(1,15.c)$
$V' = 0,98325.a.b.c$
$V' = 0,98325.V$
$\Delta V = V - V'$
$\Delta V = 0,01675.V$

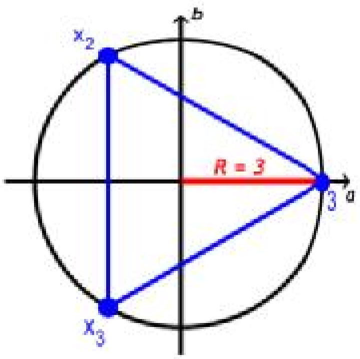
Ou seja, houve uma redução de 1,675%.

Questão 06 – Gabarito E

I – A proposição falha, se $a < b$, para $c < 0$.
II – A proposição falha, por exemplo, para $a = 2$ e $b = \frac{1}{4}$.
III – A proposição falha, por exemplo, para $a = -3$ e $b = -2$.

Questão 07 – Gabarito D

Considerando que as raízes complexas de um número real, quando dispostas no plano de Argand-Gauss, representam os vértices de um polígono regular, e sabendo que 3 é uma das raízes, vem

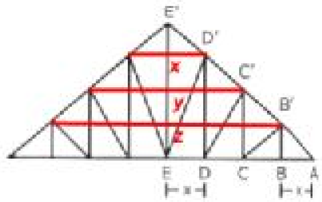


$a = R\sqrt{3}$
$a = 3\sqrt{3}$
$2p = 3a$
$2p = 9\sqrt{3}$

Questão 08 – Gabarito A

$x^2 + x + 1 = p$
$x^2 + x + (1 - p) = 0$
Raízes reais distintas: $\Delta > 0$
$b^2 - 4.a.c > 0$
$1^2 - 4.1.(1 - p) > 0$
$1 - 4 + 4p > 0$
$4p > 3$
$p > \frac{3}{4}$

Questão 09 – Gabarito B



Como $ED = DC = CB = BA$, então $AB' = B'C' = C'D' = D'E'$ e $EZ = ZY = YX = XE'$. Como o crescimento dos pilares é linear, trata-se de uma progressão aritmética, onde $r = \frac{EE'}{4} = \frac{y}{4}$.

Questão 10 – Gabarito A

f é uma função exponencial, portanto a seqüência $f(1), f(2), f(3), \ldots$ representa uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

g é uma função linear, portanto a seqüência $g(1), g(2), g(3), \ldots$ representa uma progressão aritmética de razão -3.

Questão 11 – Gabarito A

Considerando o ponto (0,5;−1) pertencente ao gráfico, temos

$f(x) = \log_b x$

$f(0,5) = \log_b (0,5)$

$-1 = \log_b \left(\frac{1}{2}\right)$

$b^{-1} = \frac{1}{2}$

$b = 2$

Determinando a altura do retângulo, vem $\log_2 2 = 1$.

Área = $b.h$ = 2.1 = 2

Questão 12 – Gabarito B

$$2^{-x}+1=2^{x}$$
$$\frac{1}{2^{x}}+1=2^{x}$$
$$\frac{1+2^{x}}{2^{x}}=\frac{\left(2^{x}\right)^{2}}{2^{x}}$$
$$1+2^{x}=\left(2^{x}\right)^{2}$$

Substituindo $2^{x}=m$, temos

$$1+m=m^{2}$$
$$m^{2}-m-1=0$$
$$m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

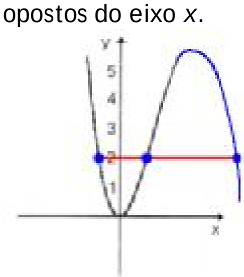
Descartando a raiz negativa, vem

$$m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$2^{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$2^{x}\cong 1{,}55$$

Logo, $0 < x < 1$.

Questão 13 – Gabarito C

Como a função polinomial $y=p(x)$ é do terceiro grau, as extremidades do gráfico estarão obrigatoriamente em lados opostos do eixo x.



Logo, $p(x)=2$ terá 3 soluções.

Questão 14 – Gabarito B

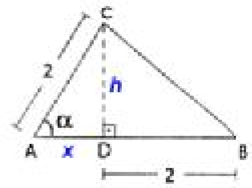
Se o polinômio $y=p(x)$ tem 1 como raiz, então a soma dos coeficientes é obrigatoriamente igual a zero.

Questão 15 – Gabarito A

Considerando $\pi\cong 3{,}14$,

$$\cos\pi<\cos 3<\cos\frac{5\pi}{6}$$
$$-1<\cos 3<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questão 16 – Gabarito D



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{2}$$
$$h = 2\,\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{2}$$
$$x = 2\cos\alpha$$
$$A = \frac{(2+2\cos\alpha).2\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$
$$A = (2+2\cos\alpha).\text{sen}\,\alpha$$
$$A = 2\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$
$$A = 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}(2\alpha)$$

Questão 17 – Gabarito E

Resolvendo para cada um dos fatores da equação, temos

$$\cos(\pi x) = 0$$
$$\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$
$$k = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$
$$k = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$
$$k = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

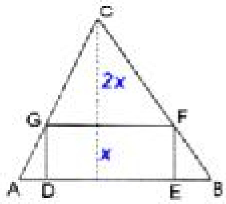
$$\log(x-1) = 0$$
$$10^0 = x - 1$$
$$1 = x - 1$$
$$x = 2$$

Determinando valores aceitáveis para x, temos

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1$$

Conjunto solução = $\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots\right\}$

Questão 18 – Gabarito D



$$h = 3x$$
$$a = \frac{AB.h}{2}$$
$$AB = \frac{2a}{h}$$

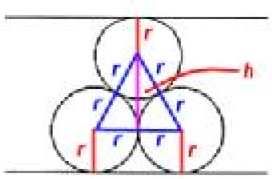
Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{2x}{h} = \frac{GF}{AB}$$
$$\frac{2x}{3x} = \frac{GF}{\left(\frac{2a}{h}\right)}$$
$$\frac{2}{3}.\frac{2a}{h} = GF$$
$$\frac{4a}{3h} = GF$$

Calculando a área do retângulo, vem

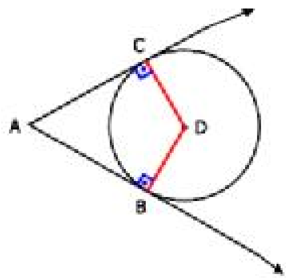
$$S_{ret} = GF.x$$
$$S_{ret} = \frac{4a}{3h}.\frac{h}{3}$$
$$S_{ret} = \frac{4a}{9}$$

Questão 19 – Gabarito D



$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$
$$d = r + r + r\sqrt{3}$$
$$d = 2r + r\sqrt{3}$$
$$d = r\left(2 + \sqrt{3}\right)$$
$$d \cong r\,(2 + 1{,}75)$$
$$d \cong 3{,}75r$$

Questão 20 – Gabarito A



$BAC = 70°$
$ABD = 90°$
$ACD = 90°$
Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero vale 360°, temos
$360° = 70° + 90° + 90° + BDC$
$BDC = 110°$

Questão 21 – Gabarito C

O quadrilátero AMGN é um losango em que as diagonais menor e maior são, respectivamente, a diagonal da face e a diagonal do cubo.

$$A = \frac{D.d}{2} = \frac{a\sqrt{3}.a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Questão 22 – Gabarito B

Em uma esfera inscrita em um cubo, vale a relação $a = 2R$.

$$\frac{V_{Esfera}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{a^3} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{(2R)^3} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{8R^3} = \frac{4\pi R^3}{3}.\frac{1}{8R^3} = \frac{\pi}{6}$$
$$\frac{V_{Esfera}}{V_{Cubo}} \cong \frac{3,14}{6} \cong \frac{1}{2}$$

Questão 23 – Gabarito D

$$(PA)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$
$$(PB)^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2$$
$$(PA)^2 + (PB)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

que representa uma circunferência de centro $C(1,0)$ e raio 1.

Questão 24 – Gabarito C

Conforme o gráfico, temos $y = 5 - x$.
Portanto, $1 < x < 4$ e $0 < y < 5 - x$.

Questão 25 – Gabarito B

Passando a equação fornecida para a forma geral, temos $3x - 4y = 0$. Como o círculo é tangente ao eixo das ordenadas, o raio coincide com a abscissa do centro. Por distância de ponto a reta, vem

$$d_{Cr} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$x_0 = \frac{|3x_0 - 4y_0 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$x_0 = \frac{|3x_0 - 4y_0|}{5}$$

$$5x_0 = |3x_0 - 4y_0|$$

$$\pm 5x_0 = 3x_0 - 4y_0$$

Portanto, para que o círculo esteja no primeiro quadrante,

$$-8x_0 + 4y_0 = 0$$

$$2x_0 - y_0 = 0$$

Questão 26 – Gabarito C

De acordo com as propriedades dos determinantes, multiplicando-se uma fila por um número, o determinante fica multiplicado por esse número.

$$\det A_{2x2} = 5 \Rightarrow \det(2A)_{2x2} = 5.2.2 = 20$$

Questão 27 – Gabarito B

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow x - z = 0$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

A solução (a,b,c) é igual a (0,1,0), portanto $a + b + c = 1$.

Questão 28 – Gabarito E

Soma	1	2	3	4	5	6
1				*5*		
2			*5*			
3		*5*				
4	*5*					
5						
6						

Do total de 36 possibilidades de resultados combinados obtidos nos dois dados, há 4 possibilidades cuja soma é igual a 5. Portanto,

$$P(\text{Soma=5}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Questão 29 – Gabarito C

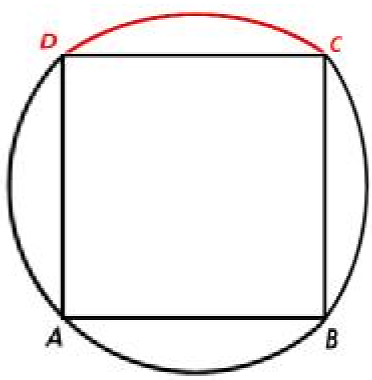
O espaço amostral que representa os três nascimentos, considerando H como o nascimento de um menino e M como o nascimento de uma menina, é igual a

$E = \{HHH, HHM, HMH, MHH, MMH, MHM, HMM, MMM\}$

Do total de 8 possibilidades, há 2 situações em que os três bebês têm o mesmo sexo. Logo,

$$P(\text{Mesmo Sexo}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Questão 30 – Gabarito E



Observando a figura, se o terceiro vértice do triângulo pertencer ao arco CD conforme indicado em vermelho na figura, o triângulo não será obtusângulo. Portanto,

$$P(\text{Acut.}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Obtus.}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$