Universitário

PASSE NA UFRGS

MATEMÁTICA

Prova resolvida

Material de uso exclusivo dos alunos do Universitário

Prova de Matemática - UFRGS/2004

01. Durante os jogos Pan-Americanos de Santo Domingo, os brasileiros perderam o ouro para os cubanos por 37 centésimos de segundo nas provas de remo.

Dentre as alternativas, o valor mais próximo desse tempo, medido em horas, é

(A) $1{,}03 \cdot 10^{-4}$.
(B) $1{,}3 \cdot 10^{-4}$.
(C) $1{,}03 \cdot 10^{-3}$.
(D) $1{,}3 \cdot 10^{-3}$.
(E) $1{,}03 \cdot 10^{-2}$.

02. As informações do quadro abaixo foram publicadas na edição 1815 da revista *Veja*, de 13 de agosto de 2003.

O Brasil tem uma dívida de 285 bilhões de dólares e paga 50 bilhões de dólares de juros por ano.	Os Estados Unidos têm uma dívida de 6,7 trilhões de dólares e pagam 70 bilhões de dólares de juros por ano.

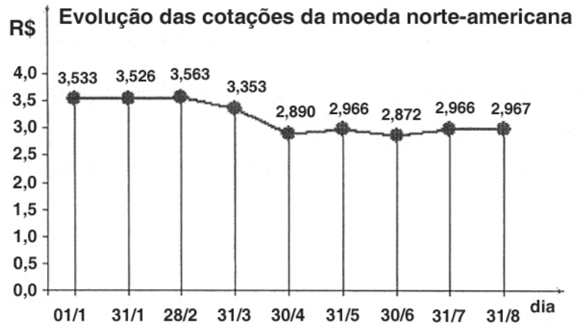
Segundo as informações do quadro, comparando as taxas de juros anuais pagas pelo Brasil e pelos Estados Unidos, conclui-se que a taxa de juros anuais brasileira é

(A) menor que a americana.
(B) igual à americana.
(C) o dobro da americana.
(D) inferior à americana multiplicada por 5.
(E) superior à americana multiplicada por 10.

03. O salário bruto de uma pessoa sofre um desconto de 25%. Com um novo desconto de 11% sobre 3/5 do seu salário bruto, o total de descontos sobre o salário bruto será de

(A) 21,6%.
(B) 26,4%.
(C) 31,5%.
(D) 33,3%.
(E) 36,3%.

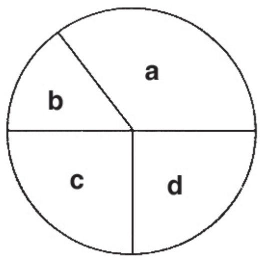
04. O gráfico abaixo representa o valor de um dólar em reais em diferentes datas do ano de 2003.



A partir desses dados, pode-se afirmar que, no primeiro semestre de 2003, o real, em relação ao dólar,

(A) desvalorizou 0,661.
(B) desvalorizou mais de 10%.
(C) manteve mais de 10%.
(D) valorizou menos de 10%.
(E) valorizou mais de 20%.

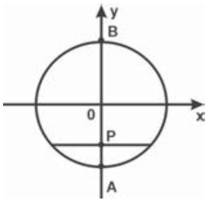
05. Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura abaixo.



Ao setor **a** estão associadas 35% das respostas, ao setor **b**, 270 respostas e, aos setores **c** e **d**, um mesmo número de respostas. Esse número é

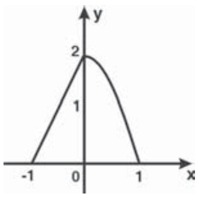
(A) 45.
(B) 90.
(C) 180.
(D) 450.
(E) 900.

06. Na figura abaixo, estão representados o círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$, um ponto P qualquer pertencente ao diâmetro $\overline{AB}$ e a corda do círculo, a qual contém P e é paralela ao eixo das abscissas.

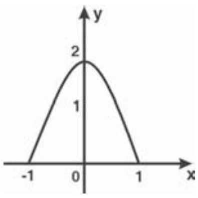


Considere a função f que, à ordenada do ponto P, faz corresponder o comprimento da corda acima citada. Dentre os gráficos abaixo, o que pode representar f é

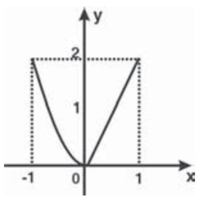
(A)



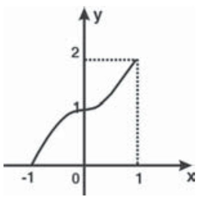
(B)



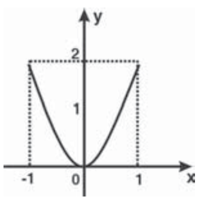
(C)



(D)



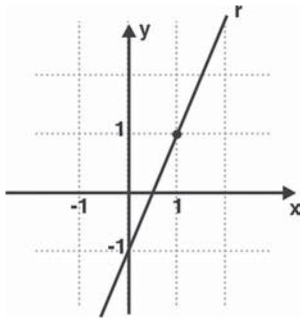
(E)



07. O domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{(1-x)(3+x)}$ é o intervalo

(A) $(-\infty, -3]$.
(B) $[-3, -1)$.
(C) $(-3, 0)$.
(D) $[-3, 1]$.
(E) $[1, +\infty)$.

08. Na figura abaixo, a reta **r** é o gráfico da função real de variável real definida por $y = \log(b \cdot a^x)$, onde a e b são números reais positivos.



O valor de $\dfrac{a}{b}$ é

(A) 0,1.
(B) 1.
(C) 10.
(D) 10^2.
(E) 10^3.

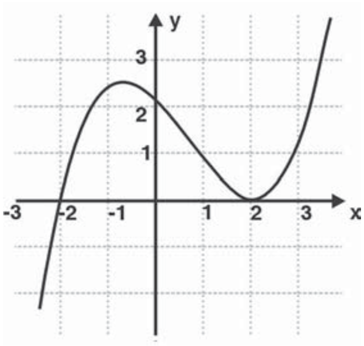
09. Analisando os gráficos das funções reais de variável real definidas por $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1}$ e $g(x) = x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, verificamos que todas as raízes da equação $f(x) = g(x)$ pertencem ao intervalo

(A) $[0, 3]$.
(B) $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right]$.
(C) $[1, 5)$.
(D) $\left(\dfrac{3}{2}, 6\right]$.
(E) $(2, 6)$.

10. A soma $\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\log\frac{4}{5}+...+\log\frac{19}{20}$ é igual a.

(A) – log 20.
(B) – 1.
(C) log 2.
(D) 1.
(E) 2.

11. Na figura abaixo está representado o gráfico de um polinômio de grau 3.



A soma dos coeficientes desse polinômio é

(A) 0,5.
(B) 0,75.
(C) 1.
(D) 1,25.
(E) 1,5.

12. Sabendo-se que *i* e – *i* são raízes da equação $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$

(A) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(D) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{6}}{2}$.

(E) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

13. $(1 + i)^{15}$ é igual a

(A) $64\ (1 + i)$.
(B) $128\ (1 – i)$.
(C) $128\ (– 1 – i)$.
(D) $256\ (– 1 + i)$.
(E) $256\ (1 + i)$.

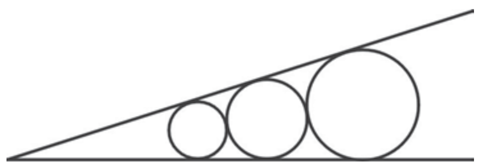
14. Considere a disposição de números abaixo.

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
. . . . . .
. . . .

O primeiro elemento da quadragésima linha é

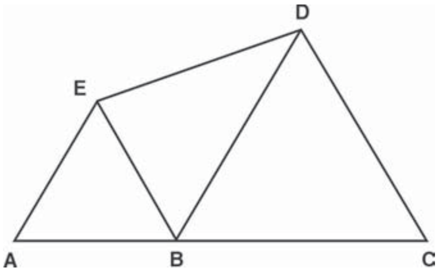
(A) 777.
(B) 778.
(C) 779.
(D) 780.
(E) 781.

15. Na figura abaixo, os círculos que se interceptam são tangentes, e as duas retas são tangentes a todos os círculos. Sabendo que a área do disco menor é 6 m² e a do maior é 24 m², conclui-se que a área do outro disco é



(A) 8 m².
(B) 10 m².
(C) 11 m².
(D) 12 m².
(E) 15 m².

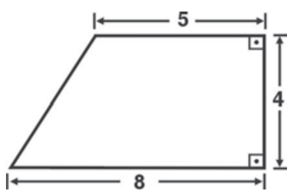
16. Na figura a seguir, ABE e BCD são triângulos equiláteros de lados 4 e 6, respectivamente.



A área do quadrilátero ACDE é

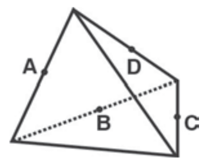
(A) $19\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) 19.
(C) $19\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $19\sqrt{2}$.
(E) $19\sqrt{3}$.

17. Os babilônios utilizavam a fórmula $A = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ para determinar aproximadamente a área de um quadrilátero com lados consecutivos de medidas a, b, c, d.
Para o quadrilátero da figura a seguir, a diferença entre o valor aproximado da área obtido utilizando-se a fórmula dos babilônicos e o valor exato da área é



(A) $\frac{11}{4}$.
(B) 3.
(C) $\frac{13}{4}$.
(D) 4.
(E) $\frac{21}{4}$.

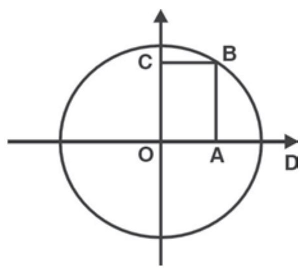
18. Na figura abaixo, os vértices do quadrilátero ABCD são pontos médios de quatro das seis arestas do tetraedro regular.



Se a aresta desse tetraedro mede 10, então a área do quadrilátero ABCD é

(A) 25.
(B) $25\sqrt{3}$.
(C) 75.
(D) $50\sqrt{3}$.
(E) 100.

19. Na figura abaixo, o vértice A do retângulo OABC está a 6 cm do vértice C.



O raio do círculo mede

(A) 5 cm.
(B) 6 cm.
(C) 8 cm.
(D) 9 cm.
(E) 10 cm.

20. A opção que apresenta todas as possibilidades do número de pontos de interseção de um círculo com um retângulo é

(A) 0, 1, 2, 4 ou 8.
(B) 0, 2, 4, 6 ou 8.
(C) 0, 1, 3, 5 ou 7.
(D) 0, 2, 3, 5 ou 7.
(E) 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 ou 8.

21. Na figura 1, $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$ e, na figura 2, $\overline{GH}$ é paralelo a $\overline{IJ}$

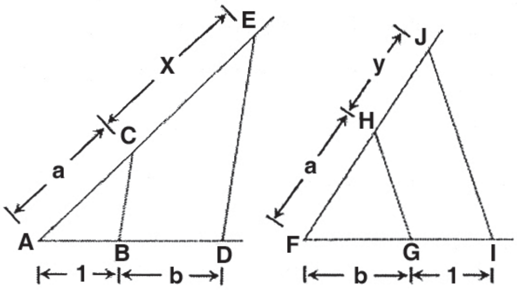


figura 1 figura 2

Então, x e y valem, respectivamente,

(A) ab e $\frac{a}{b}$.

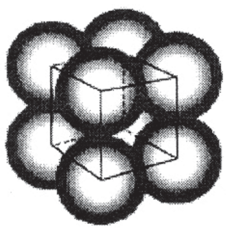
(B) ab e $\frac{b}{a}$.

(C) $\frac{a}{b}$ e ab.

(D) $\frac{b}{a}$ e ab.

(E) $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$.

22. No desenho abaixo, em cada um dos vértices do cubo está centrada uma esfera cuja medida do diâmetro é igual à medida da aresta do cubo.



A razão entre o volume da porção do cubo ocupado pelas esferas e o volume do cubo é

(A) $\frac{\pi}{6}$.

(B) $\frac{\pi}{5}$.

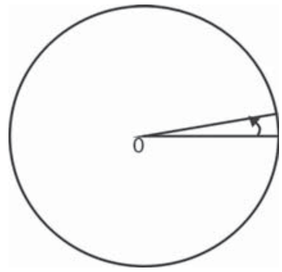
(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{\pi}{3}$.

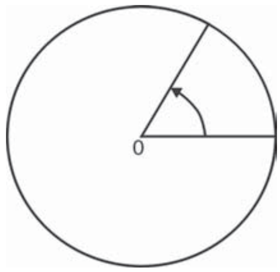
(E) $\frac{\pi}{2}$.

23. Dentre os desenho abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é

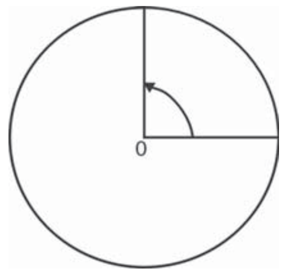
(A)



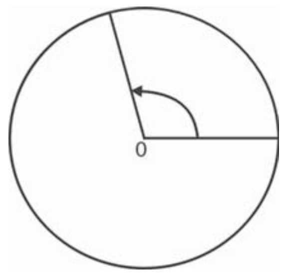
(B)



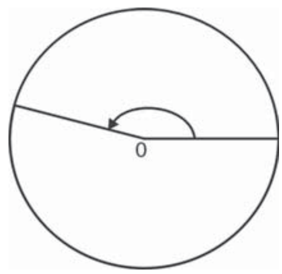
(C)



(D)

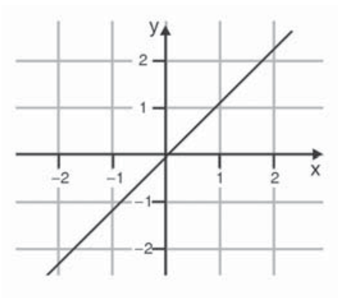


(E)

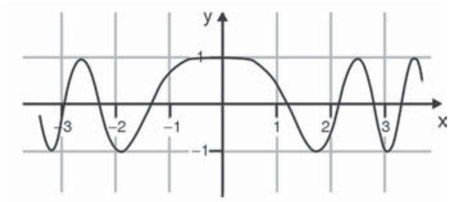


24. Dentre os gráficos abaixo, o que pode representar a função $y = (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2$ é

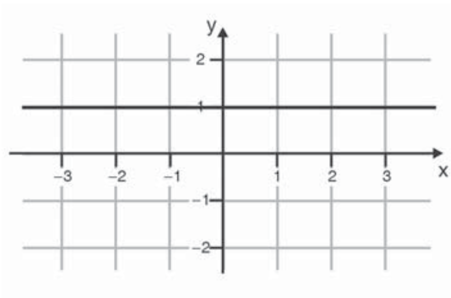
(A)



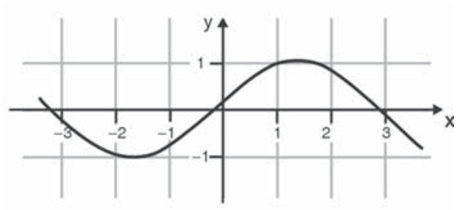
(B)



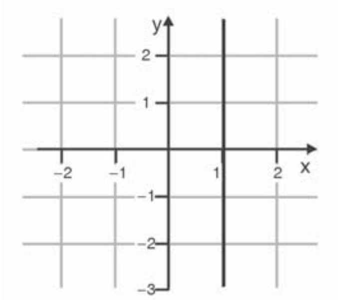
(C)



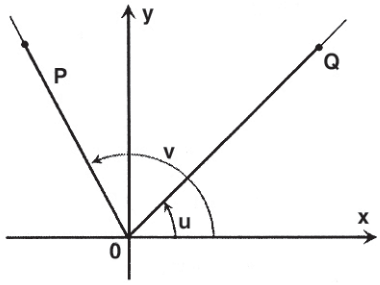
(D)



(E)



25. Na figura abaixo, os ângulos u e v medem, respectivamente, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{3}$, OP = $\sqrt{2}$ e OQ = $\sqrt{3}$



Então, $(PQ)^2$ é

(A) $2+\sqrt{3}$.
(B) $3+\sqrt{2}$.
(C) $2+\sqrt{2}$.
(D) $3+\sqrt{3}$.
(E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

26. Um fabricante produziu três lotes de suco de uva. Dois dos lotes contêm as vitaminas A e C nas concentrações indicadas na tabela abaixo.

LOTE	VITAMINA A POR LITRO	VITAMINA C POR LITRO
1	5 mg	5 mg
2	1 mg	3 mg

O suco do terceiro lote não contém vitaminas. O fabricante deseja misturar porções convenientes desses três lotes de maneira que o suco obtido contenha as concentrações de 1 mg de vitamina A e 2 mg de vitamina C por litro.

Essa mistura conterá

(A) os três lotes em quantidades iguais.
(B) dois lotes em quantidades iguais.
(C) dois lotes em quantidades iguais e o outro numa quantidade maior.
(D) um dos lotes em quantidade igual á soma das quantidades dos outros dois.
(E) um dos lotes em quantidade superior à soma das quantidades dos outros dois.

27. O sistema linear

$$\begin{cases}(k+2)x+y-z=0\\ x+ky+z=0\\ -x+(k-1)z=4\end{cases}$$

é possível e determinado, exceto para um número finito de valores de k. A soma de todos esses valores de k é

(A) – 1.
(B) $-\frac{1}{2}$.
(C) 0.
(D) $\frac{1}{2}$.
(E) 1.

28. Para colocar preço em seus produtos, uma empresa desenvolveu um sistema simplificado de código de barras formado por cinco linhas separadas por quatro espaços. Podem ser usadas linhas de três larguras possíveis e espaços de duas larguras possíveis.

O número total de preços que podem ser representados por esse código é

(A) 1440.
(B) 2880.
(C) 3125.
(D) 3888.
(E) 4320.

29. Deseja-se construir um triângulo com os vértices sobre os vértices de um octógono regular.
A probabilidade de que sejam usados somente diagonais e nenhum dos lados do octógno é

(A) $\frac{2}{21}$
(B) $\frac{7}{40}$
(C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{2}{7}$
(E) $\frac{1}{3}$

30. Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos.

A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo é de

(A) 14%.
(B) 16%.
(C) 20%.
(D) 25%.
(E) 33%.

Respostas Comentadas

Questão 01 – Letra A (média)

$$\frac{37}{100}\times\frac{1}{3600}=1{,}03\times10^{-4}$$

Questão 02 - Letra E (fácil)

$$\frac{50}{285}>10\times\frac{70}{6700}$$

Questão 03 – Letra C (média)

$$\frac{25}{100}+\frac{11}{100}\times\frac{3}{5}=31{,}6\%$$

Questão 04 – Letra E (média)

$$\frac{3{,}533}{2{,}872}=1{,}23$$

$$(23\%)$$

Questão 05 – Letra D (fácil)

15% $\rightarrow$ 270
25% $\rightarrow$ c (regra de três) c = 450

Questão 06 – Letra B (média)

variação de OP está entre – 1 e +1
variação da corda está entre 0 e 2
o gráfico é de comportamento único.

Questão 07 – Letra D (fácil)

$(1 - x)(3 + x) \geq 0$

logo $x \in [-3,1]$

Questão 08 – Letra E (muito difícil)

$y = \log (b \cdot a^x)$

$y = \log b + x\log a$

como a reta passa pelos pontos (0, –1) e (1,1) sua equação é $y = 2x - 1$

portanto, $\log b = -1$ e $\log a = 2$, temos $b = 10^{-1}$ e $a = 10^2$

$a/b = 10^2 / 10^{-1} = 10^3$

Questão 09 – Letra C (difícil)

resolução: construa o gráfico de f(x) atribuindo para x os valores de 0 a 5 e faça o mesmo com g(x). Você perceberá que um dos pontos de intersecção é (1, 1) e o outro tem abcissa entre 4 e 5. Logo temos o intervalo [1; 5).

Questão 10 - Letra B (difícil)

$$\log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \log\frac{4}{5} ... + \log\frac{19}{20} =$$

$$\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}...\frac{19}{20}\right) =$$

$$\log\frac{2}{20} =$$

$$\log\frac{1}{10} = -1$$

Questão 11 – Letra B (difícil)

$P(x) = a(x + 2)(x - 2)^2$

$P(x) = a(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$

$8a = 2$, logo $a = 1/4$

$P(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$

Soma dos coeficientes igual a 0,75

Questão 12 – Letra C (difícil)

i e $-i$ são raízes logo $x^2 + 1$ é fator

$x^4 - x^3 - x - 1$ dividido por $x^2 + 1$ dá quociente $x^2 - x - 1$

as raízes de $x^2 - x - 1$ são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Questão 13 – Letra B (média)

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{15} &= \left[(1+i)^2\right]^7 \cdot (1+i) \\
&= [2i]^7 \cdot (1+i) \\
&= 128i^7 \cdot (1+i) \\
&= -128i \cdot (1+i) \\
&= 128 \cdot (1-i)
\end{aligned}
$$

Questão 14 – Letra E (difícil)

Observe a seqüência (1, 2, 4, 7, 11...) ela pode ser escrita como (1, 1+1, 1+1+2, 1+1+2+3, 1+1+2+3+4..., 1+1+2+3+4+...+39) perceba que o último termo vale 781.

Questão 15 – Letra D (fácil)

$$A = \sqrt{6 \times 24}$$

$$A = 12$$

Questão 16 – Letra E (média)

$$S_{ABE} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{BCD} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{BED} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60°}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$S_{ACDE} = 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 19\sqrt{3}$$

Questão 17 – Letra C (média)

$$S_{Trapézio} = \frac{(5+8)\cdot 4}{2} = 26$$

Traçando-se a altura do trapézio a partir do vértice à esquerda da base menor de medida 5, pode-se construir um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cuja hipotenusa também irá medir 5.

$$S_{Babilônicos} = \frac{(5+8)(4+5)}{4} = \frac{13 \cdot 9}{4} = \frac{117}{4}$$

$$\text{Diferença} = \left|26 - \frac{117}{4}\right| = \frac{13}{4}$$

Questão 18 – Letra A (média)

Os lados do quadrilátero ABCD são bases médias dos triângulos das faces do tetraedro, portanto medem 5 cada, e formam um quadrado.

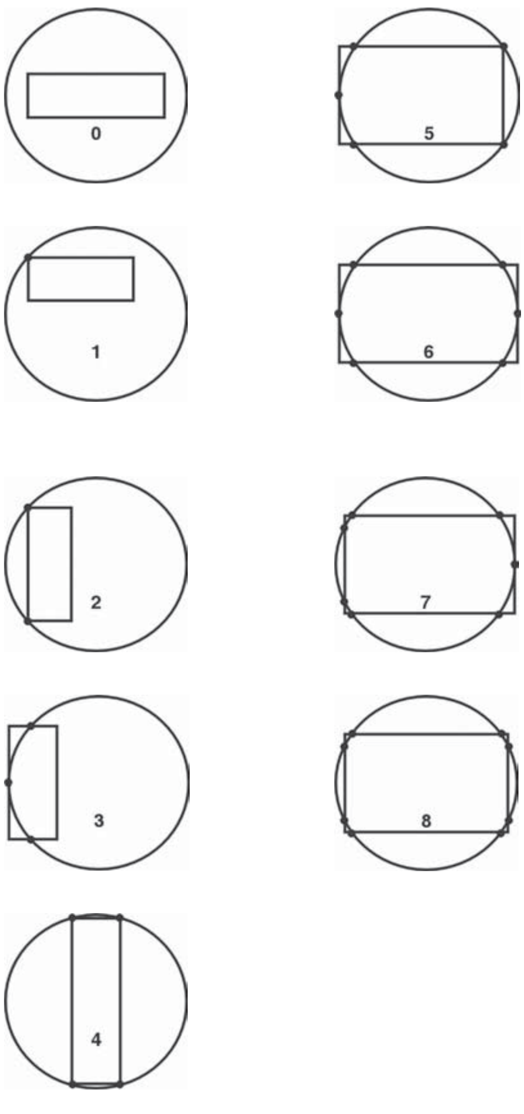
Logo, $S = 5^2 = 25$.

Questão 19 – Letra B (fácil)

A diagonal AC tem a mesma medida da diagonal OB, portanto AC = OB = Raio = 6.

Questão 20 – Letra E (difícil)

Desenhando um retângulo e um círculo nas diversas posições possíveis, chega-se à alternativa correta. Acompanhe os exemplos abaixo.



Questão 21 – Letra A (média)

Pelo Teorema de Tales, vem

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b} \rightarrow x = ab$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1} \rightarrow y = \frac{a}{b}$$

Questão 22 – Letra A (difícil)

A porção do cubo ocupada por cada uma das esferas corresponde a 1/8 de esfera. Como são 8 esferas, o somatório dos volumes das porções ocupadas equivale a uma esfera inteira.

$$\frac{V_{\text{Porção Ocupada}}}{V_{\text{Cubo}}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{V_{\text{Cubo}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)}{a^3} = \frac{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)}{(2R)^3} = \frac{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)}{8R^3} = \frac{\pi}{6}$$

Questão 23 – Letra B (média)

Um arco que mede 1 radiano tem medida igual à medida do raio, o que nos leva à seguinte regra de três:

$$2\pi R \rightarrow 360°$$

$$1R \rightarrow x$$

$$x \cong 57°$$

Questão 24 – Letra C (média)

Pela primeira relação fundamental da trigonometria, $(\cos x)^2 + (\text{sen } x)^2 = 1$. Logo, y = 1 (função constante). O gráfico é uma reta horizontal.

Questão 25 – Letra A (muito difícil)

$$(PQ)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}$$

$$(PQ)^2 = 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{6} \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}$$

$$(PQ)^2 = 5 - \frac{12 - 4\sqrt{3}}{4}$$

$$(PQ)^2 = 5 - 3 + \sqrt{3}$$

$$(PQ)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

Questão 26 – Letra D (muito difícil)

Vitamina A.
Concentração = 1mg/L

$$1 = \frac{5.V_1 + 1V_2 + 0 \cdot V_3}{V_1 + V_2 + V_3} \to V_3 = 4 \cdot V_1$$

Vitamina C
Concentração = 2mg/L

$$2 = \frac{5.V_1 + 3V_2 + 0 \cdot V_3}{V_1 + V_2 + V_3} \to V_2 = 5 \cdot V_1$$

A solução é a terna (V_1 . V_2 . V_3) que vamos parametrizar fazendo V_1 = t , obtendo então V_2 = 5t e V_3 = 4t . Observe que $V_2 = V_1 + V_3$.

Questão 27 – Letra A (média)

A partir da discussão de sistemas lineares por intermédio da regra de Cramer, tem-se D = 0.

$$\begin{vmatrix} (k+2) & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 0 & (k-1) \end{vmatrix} = 0$$

$$k^3 + k^2 - 4k = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} \text{ (Girard)}$$

$$S = -1$$

Questão 28 – Letra D (média)

Linha: L

Espaço: E
Temos então LELELELEL. Pelo princípio fundamental da contagem, vem:

3.2.3.2.3.2.3.2.3 = 3888.

Questão 29 – Letra D (difícil)

Total de triângulos = $C_8^3 = 56$

Triângulos que utilizam dois lados consecutivos do octógono = 8
Triângulos que utilizam um lado e duas diagonais (4 a partir de cada lado) = 8 . 4 = 32
Triângulos indesejáveis = 40
Triângulos desejáveis = 56 – 40 = 16

$$P(A) = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}0$$

Questão 30 – Letra C (média)

Total de possibilidades de recebimento de duas fichas = $C_{10}^2 = 45$

Sorteios seqüenciais (1 – 2, 2 – 3, ..., 9 – 10) = 9

$$P(A) = \frac{9}{45} = 20\%$$

PASSE NA UFRGS